

# 重力のラグランジアン形式

中嶋 慧, 松尾 衛

October 6, 2020

## Abstract

この記事は、『一般ゲージ理論と共変解析力学』の web 付録の 1 つである。重力場のラグランジアン形式を、局所ローレンツ不変性の要請から決定する。

## Contents

1	記号と公式	1
2	ラグランジアン形式の候補	2
3	$\partial L_G / \partial d\theta^a$ の書き換え：一般形	3
4	ゲージ不変性の要請	4
5	$\partial L_G / \partial d\theta^a$ の書き換え：ゲージ不変性な場合	7
6	$L_G$ の表式	7
7	$N^*$ とアインシュタイン・ヒルベルト作用	8

## 1 記号と公式

計量テンソルは、

$$\mathring{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b, \quad \mathring{g}_{ab} := \text{diag}(-1, 1, 1 \cdots, 1) \quad (1.1)$$

と書ける。 $\theta^a$  はフレーム形式である。また、

$$\begin{aligned} \eta &:= *1, \quad \eta^a := *\theta^a, \quad \eta^{ab} := *(\theta^a \wedge \theta^b), \\ \eta^{abc} &:= *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c), \quad \eta^{abcd} := *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d) \end{aligned} \quad (1.2)$$

を導入する。以下の公式が成り立つ：

$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta_b^a \eta_{cd} - \delta_c^a \eta_{bd} + \delta_d^a \eta_{bc}, \quad (1.3)$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bc} = -\delta_b^a \eta_c + \delta_c^a \eta_b \quad (1.4)$$

## 2 ラグランジアン形式の候補

重力のラグランジアン形式を  $L_G$  とする。これは、 $d\theta^a$  の2次であると仮定する。つまり、

$$d\theta^a = \frac{1}{2} \Delta_{abc} \theta^b \wedge \theta^c \quad (2.1)$$

と置くと、

$$L_G = \mathcal{L}_G \eta, \quad \mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \Delta^{abc} P_{abcdef} \Delta^{def} \quad (2.2)$$

であり<sup>1)</sup>、 $P_{abcdef}$  は  $\mathring{g}_{ij}$  だけで書けると仮定する。また、

$$P_{abcdef} = -P_{acbdef} = -P_{abcdfe} = P_{defabc} \quad (2.3)$$

である。このようなものは、

$$P_{abcdef} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^{(i)} P_{abcdef}, \quad (2.4)$$

$$^{(1)}P_{abc}{}^{def} := \delta_a^d \delta_b^e \delta_c^f, \quad (2.5)$$

$$^{(2)}P_{abc}{}^{def} := \mathring{g}_{a[b} \delta_{c]}^{[f} \mathring{g}^{e]d}, \quad (2.6)$$

$$^{(3)}P_{abc}{}^{def} := \delta_a^{[d} \delta_b^e \delta_c^f] \quad (2.7)$$

の形に限られる。 $\alpha_i$  は実定数である。

ところで、 $\Delta_{abc}$  は、

$$\Delta_{abc} = ^{(1)}\Delta_{abc} + ^{(2)}\Delta_{abc} + ^{(3)}\Delta_{abc}, \quad (2.8)$$

$$^{(i)}\Delta^b{}_{ba} = \delta_2^i \Delta^b{}_{ba}, \quad (2.9)$$

$$^{(i)}\Delta_{[abc]} = \delta_3^i \Delta_{[abc]} \quad (2.10)$$

と分解できる。 $\Delta_a := \Delta^b{}_{ba}$  とすると、

$$^{(2)}\Delta_{abc} = \frac{2\mathring{g}_{a[b} \Delta_{c]}}{D-1}, \quad (2.11)$$

$$^{(3)}\Delta_{abc} = \Delta_{[abc]}, \quad (2.12)$$

$$^{(1)}\Delta_{abc} = \Delta_{abc} - ^{(2)}\Delta_{abc} - ^{(3)}\Delta_{abc} \quad (2.13)$$

である。今、

$$^{(i)}\Delta_{abc} = ^{(i)}I_{abc}{}^{def} \Delta_{def} \quad (2.14)$$

と置くと、

$$^{(3)}I_{abc}{}^{def} = \delta_a^{[d} \delta_b^e \delta_c^f], \quad (2.15)$$

$$^{(2)}I_{abc}{}^{def} = \frac{2}{D-1} \mathring{g}_{a[b} \delta_{c]}^{[f} \mathring{g}^{e]d} \quad (2.16)$$

<sup>1)</sup>添え字の上げ下げは、 $\mathring{g}_{ab}$  のとその逆行列  $\mathring{g}^{ab}$  で行う。

であり、

$${}^{(i)}I_{abcdef} = {}^{(i)}I_{defabc} \quad (2.17)$$

である。また、

$$P_{abcdef} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{1}{2} {}^{(i)}I_{abcdef} \quad (2.18)$$

と書ける。 $a_i$  は  $\alpha_i$  で表すことができる。

### 3 $\partial L_G / \partial d\theta^a$ の書き換え：一般形

以下、

$$F_a := \frac{\partial L_G}{\partial d\theta^a} \quad (3.1)$$

を求める。

まず、

$$V_{a,bc} = d\theta_a \wedge \eta_{bc} \quad (3.2)$$

は  $D$  形式であり、

$$\begin{aligned} V_{a,bc} &= \frac{1}{2} \Delta_{ade} \theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{ade} \theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{ade} (\delta_b^d \delta_c^e - \delta_c^d \delta_b^e) \eta \\ &= \Delta_{abc} \eta \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。このとき、 $\xi$  を  $D$  形式として、

$$\delta \Delta_{abc} \xi = (-\delta V_{a,bc} + \Delta_{abc} \delta \eta) * \xi \quad (3.4)$$

となる。特に、

$$\delta \Delta_{abc} \eta = \delta V_{a,bc} - \Delta_{abc} \delta \eta \quad (3.5)$$

である。 $d\theta^a$  についての変分は、

$$\delta \Delta_{abc} \eta = \delta d\theta_a \wedge \eta_{bc} \quad (3.6)$$

である。

さて、

$$\begin{aligned} \delta L_G &= \frac{1}{2} \delta \Delta^{abc} P_{abcdef} \Delta^{def} \eta + \frac{1}{2} \Delta^{abc} P_{abcdef} \delta \Delta^{def} \eta \\ &= \delta \Delta^{abc} P_{abcdef} \Delta^{def} \eta \end{aligned} \quad (3.7)$$

なので、

$$\delta L_G = \delta d\theta^a \wedge \eta^{bc} P_{abcdef} \Delta^{def} \quad (3.8)$$

となり、

$$\begin{aligned} F_a &= P_{abcdef} \Delta^{def} \eta^{bc} \\ &= * \sum_{i=1}^3 a_i \frac{1}{2} {}^{(i)} I_{abcdef} \Delta^{def} \theta^b \wedge \theta^c \\ &= * \sum_{i=1}^3 a_i \frac{1}{2} {}^{(i)} \Delta_{abc} \theta^b \wedge \theta^c \\ &= * \sum_{i=1}^3 a_i {}^{(i)} d\theta_a, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$${}^{(i)} d\theta_a := \frac{1}{2} {}^{(i)} \Delta_{abc} \theta^b \wedge \theta^c \quad (3.10)$$

を得る。

## 4 ゲージ不変性の要請

微小ローレンツ変換は、

$$\delta\theta^a = \varepsilon^a_b \theta^b, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba} \quad (4.1)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \delta L_G &= \delta\theta^a \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \theta^a} + d(\delta\theta^a) \wedge F_a \\ &= \varepsilon^a_b \left( \theta^b \wedge \frac{\partial L_G}{\partial \theta^a} + d\theta^b \wedge F_a \right) + d\varepsilon^{ab} \wedge \theta_{[b} \wedge F_{a]} \end{aligned} \quad (4.2)$$

である。 $L_G$  が大域ローレンツ不変なら第1項は、0である。第2項は、

$$d\varepsilon^{ab} \wedge \theta_{[b} \wedge F_{a]} = d(\varepsilon^{ab} \theta_{[b} \wedge F_{a]}) - \varepsilon^{ab} d(\theta_{[b} \wedge F_{a]}) \quad (4.3)$$

であり、これが全微分であって欲しいので、

$$d(\theta_{[b} \wedge F_{a]}) = 0 \quad (4.4)$$

が要請される。

さて、

$$\theta_{[b} \wedge F_{a]} = \sum_{i=1}^3 \theta_{[b} \wedge a_i * {}^{(i)} d\theta_{a]} \quad (4.5)$$

である。ここで、

$$*^{(i)}d\theta_a = \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}\eta^{dc}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \theta_b \wedge *^{(i)}d\theta_a &= \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}\theta_b \wedge \eta^{dc} \\ &= \frac{1}{2}{}^{(i)}\Delta_{adc}(-\delta_b^d\eta^c + \delta_b^c\eta^d) \\ &= -{}^{(i)}\Delta_{abc}\eta^c \end{aligned} \quad (4.7)$$

なので、

$$\theta_b \wedge *^{(3)}d\theta_a = -\Delta_{[abc]}\eta^c, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \theta_b \wedge *^{(2)}d\theta_a &= -\frac{2\mathring{g}_{a[b}\Delta_{c]}}{D-1}\eta^c \\ &= -\frac{\mathring{g}_{ab}}{D-1}\Delta_c\eta^c + \frac{1}{D-1}\Delta_b\eta_a \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。よって、

$$\theta_{[b} \wedge *^{(3)}d\theta_{a]} = -\Delta_{[abc]}\eta^c, \quad (4.10)$$

$$\theta_{[b} \wedge *^{(2)}d\theta_{a]} = \frac{1}{D-1}\Delta_{[b}\eta_{a]}, \quad (4.11)$$

$$\theta_{[b} \wedge *d\theta_{a]} = -\Delta_{[ab]c}\eta^c \quad (4.12)$$

となる。今、

$${}^{(1)}\mathcal{F}_{ab} := \Delta_{[ab]c}\eta^c = -\theta_{[b} \wedge *d\theta_{a]}, \quad (4.13)$$

$${}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} := 2\Delta_{[a}\eta_{b]} = -2(D-1)\theta_{[b} \wedge *^{(2)}d\theta_{a]}, \quad (4.14)$$

$${}^{(3)}\mathcal{F}_{ab} := \Delta_{[abc]}\eta^c = -\theta_{[b} \wedge *^{(3)}d\theta_{a]} \quad (4.15)$$

とすると、

$$\theta_{[b} \wedge F_{a]} = \sum_{i=1}^3 b_i{}^{(i)}\mathcal{F}_{ab} \quad (4.16)$$

となる  $\{b_i\}$  が存在する。今、

$$F_a = *H_a, \quad (4.17)$$

$$H_a = c_0d\theta_a + c_2{}^{(2)}d\theta_a + c_3{}^{(3)}d\theta_a \quad (4.18)$$

とすると、

$$c_0 = -b_1, \quad c_2 = -2(D-1)b_2, \quad c_3 = -b_3 \quad (4.19)$$

である。さて、

$$\begin{aligned} d\eta_{ab} &= d\theta^c \wedge \eta_{abc} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_{de}^c\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{abc} \\ &= -\Delta_b\eta_a + \Delta_a\eta_b + \Delta_{ab}^c\eta_c \\ &= {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + \Delta_{ab}^c\eta_c \end{aligned} \quad (4.20)$$

である。また、

$$\Delta_{[abc]} = \frac{2}{3}\Delta_{[ab]c} + \frac{1}{3}\Delta_{cab} \quad (4.21)$$

なので、

$$\Delta^c{}_{ab}\eta_c = 3^{(3)}\mathcal{F}_{ab} - 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab} \quad (4.22)$$

である。よって、

$$d\eta_{ab} = {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + 3^{(3)}\mathcal{F}_{ab} - 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab} \quad (4.23)$$

となる。また、 $\theta^a$  の双対基底を  $e_b$  とする ( $e_a]\theta^b = \delta_a^b$ ) と、

$$e_d]d\theta^d = \Delta_c\theta^c, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} (e_d]d\theta^d) \wedge \eta_{ab} &= \Delta_c\theta^c \wedge \eta_{ab} \\ &= -2\Delta_{[a}\eta_{b]} \\ &= -{}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} \end{aligned} \quad (4.25)$$

である。また、 $\theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]} = {}^{(1)}\mathcal{F}_{ab}$  である。

以上より、

$${}^{(1)}\mathcal{F}_{ab} = \theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]}, \quad (4.26)$$

$${}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} = (e_c]d\theta^c) \wedge \eta_{ab}, \quad (4.27)$$

$${}^{(3)}\mathcal{F}_{ab} = \frac{1}{3}[d\eta_{ab} - {}^{(2)}\mathcal{F}_{ab} + 2^{(1)}\mathcal{F}_{ab}] \quad (4.28)$$

であり、

$$\begin{aligned} \theta_{[b} \wedge F_{a]} &= \sum_{i=1}^3 b_i^{(i)}\mathcal{F}_{ab} \\ &= \frac{b_3}{3}d\eta_{ab} + \left(b_2 - \frac{1}{3}b_3\right)(e_c]d\theta^c) \wedge \eta_{ab} + \left(b_1 + \frac{2}{3}b_3\right)\theta_{[a} \wedge *d\theta_{b]} \end{aligned} \quad (4.29)$$

を得る。よって、

$$b_2 = \frac{1}{3}b_3, \quad b_1 = -\frac{2}{3}b_3 \quad (4.30)$$

であれば良い [1]。よって、

$$\begin{aligned} H_a &= b_3 \left[ \frac{2}{3}d\theta_a - \frac{2(D-1)}{3}{}^{(2)}d\theta_a - {}^{(3)}d\theta_a \right] \\ &= b_3 \left[ \frac{2}{3}d\theta_a - \frac{2}{3}\overset{\circ}{g}_{a[b}\Delta_{c]}\theta^b \wedge \theta^c - \frac{1}{2}\Delta_{[abc]}\theta^b \wedge \theta^c \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。これは、次を意味する：

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{2b_3}{3} \left[ *d\theta_a - \overset{\circ}{g}_{a[b}\Delta_{c]}\eta^{bc} - \frac{3}{4}\Delta_{[abc]}\eta^{bc} \right] \\ &= \frac{2b_3}{3} \left[ \frac{1}{2}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{3}{4}\Delta_{[abc]}\eta^{bc} \right] \\ &= \frac{2b_3}{3} \left[ \frac{1}{2}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{1}{4}(\Delta_{abc} + 2\Delta_{[bc]a})\eta^{bc} \right] \\ &= \frac{2b_3}{3} \left[ \frac{1}{4}\Delta_{abc}\eta^{bc} - \Delta^b\eta_{ab} - \frac{1}{2}\Delta_{bca}\eta^{bc} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

## 5 $\partial L_G / \partial d\theta^a$ の書き換え：ゲージ不変性な場合

ここで、

$$f_{abc} := \theta_c \wedge *(d\theta_a \wedge \theta_b) \quad (5.1)$$

という量を計算してみる：

$$\begin{aligned} f_{abc} &= \theta_c \wedge \frac{1}{2} \Delta_a^{de} \eta_{deb} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_a^{de} (\dot{g}_{cd} \eta_{eb} - \dot{g}_{ce} \eta_{db} + \dot{g}_{cb} \eta_{de}) \\ &= \Delta_{ac}^d \eta_{db} + \frac{1}{2} \dot{g}_{cb} \Delta_a^{de} \eta_{de}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

これより、

$$f_{ab}^b = -\Delta^b \eta_{ab} + \frac{1}{2} \Delta_a^{bc} \eta_{bc}, \quad (5.3)$$

$$f_{ba}^b = \Delta_{bca} \eta^{bc} + \frac{1}{2} \Delta_a^{bc} \eta_{bc} \quad (5.4)$$

である。よって、

$$A f_{ab}^b + B f_{ba}^b = \frac{A+B}{2} \Delta_a^{bc} \eta_{bc} - A \Delta^b \eta_{ab} + B \Delta_{bca} \eta^{bc} \quad (5.5)$$

である。一方、

$$F_a = \frac{2b_3}{3} \left[ \frac{1}{4} \Delta_{abc} \eta^{bc} - \Delta^b \eta_{ab} - \frac{1}{2} \Delta_{bca} \eta^{bc} \right] \quad (5.6)$$

なので、

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{2b_3}{3} (f_{ab}^b - \frac{1}{2} f_{ba}^b) \\ &= \frac{2b_3}{3} \left[ \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) - \frac{1}{2} \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \right] \\ &= -\frac{2b_3}{3} \pi_a =: \frac{1}{\kappa} \pi_a, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\pi_a := -\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2} \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \quad (5.8)$$

を得る。

## 6 $L_G$ の表式

ところで、 $F_a = \frac{1}{2} (F_a)_{bc} \eta^{bc}$  と置くと、

$$d\theta^a \wedge F_a = \frac{1}{2} \Delta^{abc} (F_a)_{bc} \eta \quad (6.1)$$

であり、

$$(F_a)_{bc} = 2P_{abcdef}\Delta^{def} \quad (6.2)$$

なので、

$$d\theta^a \wedge F_a = 2L_G \quad (6.3)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} L_G &= \frac{1}{2}d\theta^a \wedge F_a \\ &= \frac{1}{2\kappa}d\theta^a \wedge \pi_a \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left[ -d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa}N^*, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$N^* := -d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2}d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \quad (6.5)$$

となる。

## 7 $N^*$ とアインシュタイン・ヒルベルト作用

実は、

$$N^* = A^a_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba} \quad (7.1)$$

と書ける [2]。  $A^a_b$  はレヴィ=チビタ接続である。また、

$$N^* = *R^* - d(A^{ab} \wedge \eta_{ab}) \quad (7.2)$$

とも書ける<sup>2)</sup>。つまり、  $L_G$  は、全微分項を除くと、アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン形式である。

---

<sup>2)</sup>  $\omega^a_b$  を接続形式とする。  $A^a_b$  をレヴィ=チビタ接続 (振率がない場合の接続形式) とする：

$$d\theta^a = -A^a_b \wedge \theta^b.$$

曲率形式は、

$$\Omega^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b =: \frac{1}{2}R^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d$$

であり、

$$R_{ab} := R^c_{acb}, \quad R := \overset{\circ}{g}{}^{ab}R_{ab}$$

とする。  $R$  はスカラー曲率である。  $*R = R\eta$  は、

$$*R = \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab}$$

と書ける。リーマン接続 (同じことだがレヴィ=チビタ接続) のスカラー曲率を  $R^*$  と書く。



(7.1) を示す。  
 まず、

$$\begin{aligned} d\theta^b \wedge \theta_a &= -A^b_c \wedge \theta^c \wedge \theta_a \\ &= -A^b_{cd} \theta^d \wedge \theta^c \wedge \theta_a \end{aligned} \quad (7.3)$$

である。ここで、

$$A^a_b = A^a_{bc} \theta^c \quad (7.4)$$

と置いた。よって、

$$*(d\theta^b \wedge \theta_a) = -A^b_{cd} \eta^{dc}_a \quad (7.5)$$

であり、

$$\begin{aligned} \theta_e \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) &= -A^b_{cd} \theta_e \wedge \eta^{dc}_a \\ &= -A^b_{cd} (\delta_e^d \eta^c_a - \delta_e^c \eta^d_a + \overset{\circ}{g}_{ea} \eta^{dc}) \\ &= -A^b_{ce} \eta^c_a + A^b_{ec} \eta^c_a - \overset{\circ}{g}_{ea} A^b_{cd} \eta^{dc} \end{aligned} \quad (7.6)$$

である。よって、

$$\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) = -A_b \eta^b_a - A_{abc} \eta^{cb} \quad (7.7)$$

となる。ここで、

$$A_a := A^b_{ab} \quad (7.8)$$

である。また、

$$\begin{aligned} \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) &= -A^b_{ca} \eta^c_b + A^b_{ac} \eta^c_b - A^b_{abc} \eta^{cb} \\ &= -A^b_{ca} \eta^c_b - 2A_{abc} \eta^{cb} \end{aligned} \quad (7.9)$$

なので、 $\pi_a = -\theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a) + \frac{1}{2} \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b)$  は、

$$\pi_a = A_b \eta^b_a - \frac{1}{2} A_{bca} \eta^{cb} \quad (7.10)$$

となる。

ところで、

$$\begin{aligned} \Pi_a &:= \frac{1}{2} A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\ &= \frac{1}{2} A^{bc}_d \theta^d \wedge \eta_{abc} \\ &= \frac{1}{2} A^{bc}_d (\delta_a^d \eta_{bc} - \delta_b^d \eta_{ac} + \delta_c^d \eta_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} (A^{bc}_a \eta_{bc} - A^c \eta_{ac} - A^b \eta_{ab}) \\ &= A_b \eta^b_a - \frac{1}{2} A_{bca} \eta_{cb} \\ &= \pi_a \end{aligned} \quad (7.11)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
N^* &= d\theta^a \wedge \pi_a \\
&= d\theta^a \wedge \Pi_a \\
&= d\theta^a \wedge \frac{1}{2} A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\
&= -A^a{}_d \wedge \theta^d \wedge \frac{1}{2} A^{bc} \wedge \eta_{abc} \\
&= \frac{1}{2} A^a{}_d \wedge A^{bc} \wedge \theta^d \wedge \eta_{abc} \\
&= \frac{1}{2} A^a{}_d \wedge A^{bc} \wedge (\delta_a^d \eta_{bc} - \delta_b^d \eta_{ac} + \delta_c^d \eta_{ab}) \\
&= A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba}
\end{aligned} \tag{7.12}$$

となる。

## References

- [1] F. Gronwald and F.W. Hehl, “On the Gauge Aspects of Gravity”, arXiv:gr-qc/9602013
- [2] Walter Thirring, “A Course in Mathematical Physics 2”, Springer (second edition, 1978).